

LUCA PACIOLI I LA *DIVINA PROPORZIONE*: MATEMÀTICA I EXPERIÈNCIA A PRINCIPIS DEL RENAIXEMENT¹

Albert Presas i Puig

Max Planck Institut per a la Història de la Ciència, Berlín

Paraules claus: Pacioli, Plató, Euclid; Renaixement, secció àurea, geometria, proporció, harmonia, ciència, tècnica, art.

Luca Pacioli and the *Divina Proportione*: mathematic and experience in the Renaissance

Summary: In his treatise «*Divina Proportione*» (1509) Pacioli argues in favour of the Renaissance belief in the existence of a harmonical proportion in science, as well as in technology and art. Taking as point of outset Plato's doctrine of the four elements he applies it to the Platonic geometrical figures which are concerning to his own view the fundamental elements of the world. In his attempt to explain the geometry applied in constructing these figures he genuinely describes the practice of craftsmen in an idealized and metaphysical form.

Key words: Pacioli, Platon, Euclid; Renaissance, divine proportion, geometry, proportion, harmony, science, technology, art.

La secció àuria ha estat motiu d'estudi des dels pressupostos i perspectives més variats: des de la matemàtica, des de les arts, des de l'arquitectura, dins de la biologia i la medicina, etc., de manera que no sembla haver-hi millor exemple que pugui lligar, en el sentit de Snow, els diferents àmbits de la nostra cultura (Cramer/Kaempfer, 1992; Huntley; 1970).

El fet d'ocupar-se de Luca Pacioli, de qui no se sap amb certesa ni la data de naixement ni de la seva mort, que se situen entre 1445 i 1517, ve justificat pel fet que és el primer autor que dedicà un tractat complet a la secció àurea, *Divina Proportione*, acabada el 1497 i publicada a Venècia el 1509.

Després dels estudis d'Olschki i de Zilsel, és una tesi acceptada per la història de la ciència, l'estreta relació entre el coneixement pràctic i la reflexió teòrica que conduí a allò que més tard s'anomenaria dins de la historiografia clàssica la «Revolució científica», sense intenció de qüestionar aquest concepte per part meua.

¹ El text segueix amb unes mínimes variacions la comunicació presentada a les Jornades. Les referències bibliogràfiques es redueixen a les més imprescindibles.

Jo crec que Pacioli és un clar exemple d'aquesta tendència. Tot i que és conegut més aviat com a recopilador del saber matemàtic de l'Edat Mitjana amb la seva monumental «Summa de aritmetica, geometria, proportioni e proportionalita» del 1494, i com a figura d'enllaç amb el Renaixement, jo voldria aquí accentuar el seu paper com a autor que pretengué conjuntar els sabers pràctics de la seva època amb la tradició teòrica antiga. Aquest esforç possibilita sens dubte el camí que després seguirien personatges com Tartaglia, Guidobaldo del Monte i d'altres i que culminaria amb el treball posterior d'un Galileo Galilei. És per això que podríem considerar Luca Pacioli una de les figures exemplars i claus de la seva època.

Amb la seva obra, Pacioli intentà mostrar l'ús i l'aplicació de la matemàtica tant en les ocupacions pràctiques com en les teòriques. Tal com ell diu, el seu és un «utilissimo compendio delle scientie mathematici» (Cap. II). Cal dir que matemàtica significa per a Pacioli aritmètica, geometria, astronomia, música, perspectiva, arquitectura i cosmografia, disciplines totes elles amb el mètode de la proporcionalització com a element comú.

Amb aquest objectiu no va perdre mai de vista l'activitat pràctica dels seus contemporanis: dels mercaders, dels enginyers, dels comptables, dels arquitectes i artistes, etc. Cal dir que tots aquests oficis li eren ben coneguts, ja fos perquè els havia exercit durant alguna època de la seva vida, ja fos mitjançant la seva relació amb els més famosos arquitectes i artistes, entre les quals destaca la seva amistat amb Leon Battista Alberti i amb Leonardo da Vinci.

Mestre en teologia i alhora monjo franciscà, l'especulació religiosa serà junt amb el seu interès per les ocupacions pràctiques i les ciències matemàtiques, un altre component que es reflecteix a tota la seva obra i especialment a la *Divina Proportione*. La concepció cristiana del món defensada per Pacioli abastava la religió, l'art i la ciència, i aquesta concepció barrejada amb el neoplatonisme florentí seran les coordenades intel·lectuals de Pacioli.

El seu esforç es dirigí sempre a determinar aquelles suposades harmonies, simetries i concordances entre els més diversos àmbits, per poder entendre i dominar, amb el seu coneixement, el món i el seu transcurs. Aquesta seria per altra part, una tendència freqüent al Quattrocento. D'aquesta manera es troba amb consonància amb la tradició filosòfica clàssica recuperada per Alberti i que fa seves altra vegada les posicions i idees dels antics sobre el tema (Naredi-Rainer, 1982).

Dins de la tradició que té per primera font literària el Timaios platònic, Pacioli insisteix en la idea que no únicament en l'àmbit de la matemàtica pot parlar-se de proporcions, sinó que també la música, la geografia, la mesura del temps i del moviment, en fi, totes les ciències i les arts es redueixen en definitiva, segons ell, a harmonies, proporcions i simetries. És per això que Pacioli esdevé el principal representant d'una nova estètica matemàtica, lligada a la vegada a una metafísica molt particular.

A l'època en què Pacioli escriu la *Divina Proportione* s'inicia de forma clara la tendència cap a la matematització d'una tècnica cada cop més ambiciosa amb la intenció de trobar-hi lleis o regularitats matemàtiques que poguessin integrar diferents àmbits (Moscovici, 1982: capítol 3). Tant la *Divina Proportione* com altres tractats de l'època, i penso aquí en Alberti, Piero della Francesca, Leonardo, són un exemple dels intents d'establir la reflexió teòrica com a fonament de la pràctica artística i tècnica. Si fins ara l'únic criteri era el coneixement per l'experiència, les consideracions teòriques són les que començaven a marcar la pauta del nou desenvolupament tant tècnic com de creació artística.

Dins de la seva particular relació amb el món dels tècnics de l'època i molt amb con-

sonància amb el seu misticisme i amb la tasca pedagògica que mantingué durant tota la seva vida, a la *Divina Proportione*, Pacioli fa una reflexió tant matemàtica com filosòfica sobre la secció àurea, presentant-la com la clau per entendre l'Univers i l'obra de la Creació Divina.

El seu interès és també il·lustrar els artistes del seu temps sobre les propietats cosmològiques de les harmonies matemàtiques. El discurs de la *Divina Proportione* pot reduir-se per tant a les dues tesis següents: l'art, i especialment l'arquitectura, han de reflectir l'estructura matemàtica de l'Univers, i per altra part tota manifestació artística ha de sotmetre's a les proporcions matemàtiques com a principi universal i objectiu de bellesa.

El tractat de la *Divina Proportione* està format per tres parts: la primera d'elles titulada «Compendium de divina proportione», una segona part «Tractato de la Architectura», dins de la tradició de Vitruvi, i una tercera «Libellus in tres partiales tractatus», que és una traducció a l'italià d'un tractat anterior de Piero della Francesca.

El tractat de la *Divina Proportione* conté tot un seguit de proposicions sobre la secció àuria, especialment amb referència a Plató i Euclides, i un estudi sobre diversos poliedres i les seves diferents combinacions, tant des del punt de vista teòric com de construcció tècnica.

Cal dir que per a Pacioli, tant Plató com Euclides (tot i que confon aquest amb Euclides de Megara, el deixeble de Sòcrates) són els filòsofs per excel·lència, d'on podem concloure, que amb ells compartia la creença que les matemàtiques eren la clau per entendre el món.

La secció àuria és un cas curiós en la història de la ciència i de la filosofia. Malgrat la gran importància que Plató li dona en el seu sistema cosmològic com a fonament per a la construcció dels cossos platònics, les referències que trobem després en la literatura són més aviat poques (Olschki, (1919:225). Euclides, per exemple, en els seus llibres II i VI suposa la construcció de la secció àuria, això sí, sense anomenar-la pel seu nom i limitant-se a anunciar l'exercici de construcció. Només Pacioli pren la secció àuria com a tema de reflexió. Entre els autors de l'Antiguitat citats apareixen Plató, Euclides, Boethius, Albert de Saxònia, Biagio Pelacani i Giordano Nemorarius. Per altra part ni a l'Antiguitat ni a l'Edat Mitjana no hi trobem la denominació de «secció àuria». Mentre Pacioli utilitza «divina proportione», Kepler l'anomena «sectio divina». El nom de «secció àuria» podria venir de combinar «regula àurea», denominació medieval de la regla de tres, i de la «secció divina» de Kepler.

Com ja hem dit, Pacioli s'esforcà per mostrar als artistes i arquitectes del seu temps les propietats que ell creu cosmològiques de les harmonies matemàtiques, i en aquests sentit la secció àuria apareix com la clau per entendre l'Univers.

Al Quattrocento la proporció s'entén com un principi de la relació entre l'ésser humà, les seves accions i la naturalesa, el cosmos, amb la qual cosa barregen diferents àmbits de la tècnica, de l'art i de la tradició filosòfica.

Les proposicions que es troben sobre la secció àuria als Elements d'Euclides (II, 11; VI, 30) eren propietats, especialment en l'àmbit de les figures planes, ja conegudes a l'Antiguitat (Mössel, 1926). És a dir, Euclides teoritza una proporció geomètrica determinada ja coneguda pels pràctics, donant-li alhora una interpretació i un sentit matemàtics.

La secció àuria es troba al pentàgon i a totes les seves figures geomètriques derivades. Per tant, la secció àuria és la «ratió» que hi ha a les proporcions lineals, planes i espacials del dodecaedre i de l'icosaedre.

Segons Pacioli, els cossos platònics constituïen la base de l'estètica arquitectònica, de manera que l'artista, en realitzar el seu treball partint de la secció àuria, podia comparar-se

amb el demiürg platònic en el moment de la creació de l'univers. Partint d'aquest pressupost, Pacioli intenta convèncer una vegada i altra, tant amb arguments filosòfics com també amb arguments tècnics, de procedir d'aquesta manera si de veritat es vol aconseguir la bellesa ideal.

I precisament el meu interès aquí és mostrar i remarcar aquest aspecte, el seu rerefons pràctic, és a dir, tot i que la *Divina Proportione* s'interpreta com una obra teòrica i especulativa, en el fons, es tracta de la descripció idealitzada d'una manera d'actuar tècnica, extrapolada més tard a especulacions teòriques i cosmològiques sobre la natura i la constitució del món.

Al tractat de la *Divina Proportione*, la consideració de la secció àuria com a base i condició per a la construcció dels cinc cossos platònics es repeteix constantment. Es presenten també nombroses formes, figures i cossos geomètrics que hom pot considerar derivables d'aquests cossos platònics.

La construcció dels cossos platònics presentada per Pacioli consisteix en el mètode tècnic de l'aplicació del compàs d'obertura constant o amb un únic radi. Aquest era un mètode operatiu d'una gran precisió tècnica –evidentment, no en un sentit matemàtic– i de senzilla aplicació, característiques essencials d'un mètode tècnic eficaç. A causa de la seva senzilla aplicació i del fet que solament es necessita el concurs d'aquest instrument, símbol per excel·lència de la geometria, la proporció geomètrica obtinguda es coneixia entre els pràctics amb el nom de «proporció senzilla» (Chaier de Boscon, 1987; 1.3.2.).

Els pràctics feien ús d'aquest mètode a l'hora de determinar les proporcions d'edificis, de màquines, d'escultures, plànols, etc. aplicant una única obertura del compàs. Això suposava que una longitud determinada prèviament, el que s'anomena en la tradició vitruviana el «mòdul», constituïa la base de tota la resta de proporcions de les figures i dels diversos elements, amb el qual s'aconseguia un apreciable coeficient d'exactitud i d'homogeneïtat.

Aquest, com ja dic, era un mètode conegut pels pràctics i era la base de la majoria de tècniques de construcció, ja fossin de màquines o d'edificis; per comprovar-ho només cal veure tota la tradició que ve de Vitruvi. Cal dir, però, que aquest mètode per determinar les mesures dels diversos components d'un edifici o d'una màquina començà a perdre's amb l'aplicació dels nous mètodes de càlcul inventats al segle XVIII.

Per a la construcció de qualsevol de les figures i dels cossos comentats per Pacioli es necessita el compàs d'obertura constant, és a dir, la figura o el cos respon a una unitat central, corresponent així amb la definició platònica recollida al Timaios platònic de figura o cos ideal. Els cossos platònics, que segons la tradició filosòfica en què es troba Pacioli, constituïrien la base de l'Univers, coincideixen en el fons amb les construccions amb compàs d'obertura constant. Per tant, l'aplicació correcte d'aquest mètode permetria a l'artista participar en la suposada bellesa ideal.

Quan Pacioli comenta la geometria emprada a l'arquitectura i a l'art, presenta en una forma idealitzada determinats mètodes pràctics ben coneguts pels tècnics de la seva època, com els arquitectes, els escultors, els enginyers, els cartògrafs, etc., a qui, per altra banda, es dirigeix el seu text.

Tot això apareix de manera més clara al capítol 57 que porta per títol: «Com es col·loquen a l'esfera tots els cinc cossos regulars». I aquí cito de la *Divina Proportione*.

En aquesta esfera podem imaginar els cinc cossos regulars de la manera següent. En primer lloc, el tetraedre: si sobre la superfície de l'esfera...es marquen o s'ima-

ginen quatre punts equidistants els uns dels altres ... i s'uneixen amb sis línies rectes que necessàriament passaran pel mig de l'esfera, es formarà exactament el cos desitjat. I si imaginàriament talléssim l'esfera amb una superfície plana seguint aquestes línies en tots els sentits, llavors quedaria al descobert el tetraedre.

Fins aquí, la descripció idealitzada. Veiem ara quin es el seu origen. Cito altra vegada del mateix capítol:

Si aquesta esfera fos una pedra de bombarda i sobre ella es tracessin els quatre punts equidistants anteriorment referits, i si el picapedrer la tallés amb els seus instruments, deixant exactament els quatre punts, llavors tindriem en la pedra un tetraedre.

Si a la superfície esfèrica es marquen quatre punts equidistants entre si i s'uneixen amb dotze línies rectes, haurem situat imaginàriament a l'esfera el segon cos regular, anomenat hexaedre o cub... Si aquests punts es marquen igualment en una pedra de bombarda de la mateixa manera i un picapedrer els uneix de la forma a dalt indicada, la pedra s'haurà reduït a la forma cúbica... De la mateixa manera, si el picapedrer marca a la pedra sis punts igualment distants entre si, i s'uneixen amb dotze línies rectes, tindrà el cos de vuit bases triangulars... I si marca vint punts unint-los amb trenta línies rectes, el picapedrer tindrà el dodecaedre, es a dir, la figura de dotze bases pentagonals.

I continuo citant,

així estaran tots aquests cossos imaginaris col·locats a l'esfera de forma que els seus punts angulars estiguin situats a la superfície esfèrica i que si un dels angles toca l'esfera, tots els altres també la toquin, no sent possible que un la toqués sense que la toquessin els altres quan aquest cos estigués col·locat a l'esfera.

Pacoli, com hem vist, i dins de la tradició de textos dirigits als artesans i pràctics, dóna tota una sèrie d'instruccions operatives tot indicant com ha d'actuar l'artesà, en aquest cas el picapedrer, per obtenir, per tallar, els cossos geomètrics desitjats.

Veiem, per tant, que darrera d'aquesta interpretació metafísica de la geometria en el sentit dels cossos geomètrics platònics i la secció àuria com a fonament estructural del cosmos, de proporcions i d'harmonies cosmològiques, s'amaga la reflexió teòrica, la idealització d'un procés tècnic d'un alt rendiment i alhora ben conegut per la geometria pràctica.

Bibliografia

- DE JONG, J. J. (1994), *De Wiskundige grondslagen van de Griekse en Romeinse tempelarchitectuur in theorie en praktijk tussen de 4e en 1ste eeuw v. Chr.*, Universitat de Leiden, Tesi Doctoral.
- EUCLIDES, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Translated with introduction and commentary by Heath, Th. L., (1956), New York: Dover Publications, Inc.

- CRAMER, F.; KAEMPFER, W. (1992), *Die Natur der Schönheit*, Hemsbach: Insel.
- HUNTLEY, H. E. (1970), *The Divine Proportion. A study in Mathematical Beauty*, New York, Dover Publications, Inc.
- PACIOLI, L. (1509), *Divina Proportione*, Venetiis: Paganus.
- PRESAS PUIG, A. (1997), *Praktische Geometrie und Kosmologien*, Stuttgart: Franz Steiner (en premsa).
- MOSCOVICI, S. (1982), *Versuch über die menschliche Geschichte der Natur*, Frankfurt a. M., Suhrkamp.
- MÖSSEL, E. (1926), *Die Proportion in Antike und Mittelalter*, München: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung.
- NAREDI-RAINER, P. V. (1982), *Architektur und Harmonie. Zahl, Maß und Proportion in der abendländischen Baukunst*. Köln: DuMont.
- OLSCHKI, L. (1919), *Die Literatur der technik und der angewandten Wissenschaften vom mittelalter bis zur Renaissance*, Heidelberg/Florenz, Carl Winter, (Nachdruck Vaduz: Kraus Reprint Ltd., 1965).